Тема 3. Основы использования и работы в прикладной компьютерной программе

(системе компьютерной алгебры) Maxima.

Лабораторная работа – введение.

Задание 1.1

Компьютерная обработка информации.

**1. Модели компьютерной обработки информации**

Компьютерная обработка информации включает в себя формализованные подходы для представления и преобразования данных. Основные модели включают:

* **Детерминированные модели**:
  + Такие модели работают с точными данными и выполняют операции с гарантированным результатом. В них каждая входная величина соответствует однозначному результату. Примером может быть моделирование работы процессоров или математические модели, основанные на определенных алгоритмах.
  + **Пример**: алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя.
* **Стохастические модели**:
  + Эти модели учитывают случайные факторы и неопределенность. Они используются для обработки данных с элементами неопределенности, где результат может иметь вероятностную природу.
  + **Пример**: модели машинного обучения, такие как нейронные сети, где результат может варьироваться в зависимости от входных данных и веса связей.
* **Иерархические модели**:
  + Эти модели представляют систему данных в виде уровней, где каждый уровень обрабатывается на основе данных предыдущего. Они эффективны для организации сложных систем с множеством взаимосвязанных элементов.
  + **Пример**: иерархическая модель базы данных.
* **Сетевая модель**:
  + Обработка данных в сетевых моделях осуществляется через узлы, соединенные между собой. Эти модели используются для представления сложных взаимосвязей между элементами, например, в компьютерных сетях или графах.
  + **Пример**: модель графов для поиска кратчайшего пути.

**2. Методы компьютерной обработки информации**

Методы обработки информации включают алгоритмы и подходы, которые используются для преобразования, анализа и хранения данных.

* **Методы численного анализа**:
  + Используются для решения математических задач с помощью компьютеров, включая вычисление корней уравнений, интегрирование, дифференцирование, интерполяцию и др.
  + **Пример**: метод Ньютона для нахождения корней уравнений.
* **Методы символьной обработки**:
  + Включают работу с символами, такими как переменные, уравнения, выражения. Эти методы используются в системах компьютерной алгебры (CAS).
  + **Пример**: символьное вычисление производных или интегралов.
* **Методы машинного обучения и анализа данных**:
  + Включают алгоритмы классификации, кластеризации, регрессии и другие методы, используемые для автоматического извлечения информации из больших объемов данных.
  + **Пример**: метод ближайших соседей (k-NN) для классификации.
* **Методы обработки естественного языка (NLP)**:
  + Направлены на обработку, анализ и генерацию текста. Используются в чат-ботах, системах поиска информации и переводах.
  + **Пример**: токенизация текста и алгоритмы анализа тональности.
* **Методы криптографии**:
  + Используются для защиты данных, шифрования и дешифрования информации.
  + **Пример**: метод RSA для шифрования данных.

**3. Средства компьютерной обработки информации**

Средства обработки информации включают различные аппаратные и программные компоненты, которые обеспечивают выполнение методов и моделей.

* **Программные средства**:
  + **Операционные системы**: Windows, Linux, macOS – обеспечивают работу компьютера и взаимодействие между программами и аппаратными средствами.
  + **Прикладные программы**: специализированные программы для обработки текстов, таблиц, изображений, звука и видео.
    - **Примеры**: Microsoft Excel для обработки числовой информации, MATLAB для математического моделирования.
  + **Программное обеспечение для работы с базами данных**: обеспечивает хранение, организацию и обработку больших объемов информации.
    - **Пример**: MySQL, Oracle.
* **Аппаратные средства**:
  + **Процессоры (CPU, GPU)**: обеспечивают выполнение инструкций программ и обработку данных.
  + **Оперативная память (RAM)**: хранит временные данные, которые используются при выполнении программ.
  + **Системы хранения данных**: жесткие диски, SSD, серверные системы обеспечивают долговременное хранение информации.
  + **Сетевые устройства**: маршрутизаторы, коммутаторы и серверы для передачи и обработки данных в сетях.
* **Облачные вычисления**:
  + Предоставляют ресурсы для обработки информации через интернет. Пользователи могут арендовать вычислительные мощности и сервисы, такие как Amazon Web Services (AWS) и Google Cloud Platform (GCP).
  + Используются для обработки больших объемов данных, хранения и выполнения сложных вычислений.

Структуры данных в компьютерной алгебре.

Структуры данных играют важную роль в компьютерной алгебре, обеспечивая эффективное представление и обработку математических объектов и выражений. В компьютерной алгебре часто используются следующие структуры данных:

**1. Списки**

* **Описание**: Списки являются базовой структурой данных, которая хранит упорядоченные элементы, включая числа, переменные, функции или другие структуры.
* **Использование**:
  + Представление математических выражений в виде последовательностей операций.
  + Хранение наборов коэффициентов многочленов или элементов матриц.
* **Пример**: Многочлен 3x2+2x+13x^2 + 2x + 13x2+2x+1 можно представить как список коэффициентов [3, 2, 1].

**2. Деревья**

* **Описание**: Дерево — это иерархическая структура данных, где каждый узел может иметь дочерние узлы. Каждый узел дерева представляет собой элемент или операцию, а ветви — аргументы этой операции.
* **Использование**:
  + Символьные вычисления: дерево может быть использовано для представления математических выражений. Узлы могут содержать операторы (+, -, \*, /) или функции (sin, cos), а листья — операнды (переменные или константы).
  + Построение и оптимизация выражений.
* **Пример**: Выражение (x+y)∗z(x + y) \* z(x+y)∗z может быть представлено в виде дерева:
  + Корень: оператор умножения (\*),
  + Левый потомок: оператор сложения (+) с дочерними узлами xxx и yyy,
  + Правый потомок: переменная zzz.

**3. Графы**

* **Описание**: Графы — это структуры, состоящие из узлов (вершин) и связей (ребер) между ними. В зависимости от задач графы могут быть направленными или ненаправленными.
* **Использование**:
  + Представление сложных взаимосвязей между элементами, например, в системе линейных уравнений.
  + Использование в решении задач оптимизации, таких как поиск кратчайшего пути или минимизации вычислений.
* **Пример**: Граф может быть использован для представления множества функций, где каждая вершина — это функция, а ребра — зависимости между ними.

**4. Массивы и матрицы**

* **Описание**: Массивы и матрицы — это структуры данных для представления многомерных числовых данных. Массив — это упорядоченная коллекция чисел или выражений, матрица — двумерный массив.
* **Использование**:
  + Решение систем линейных уравнений.
  + Представление данных в символьной алгебре, таких как коэффициенты многочленов.
* **Пример**: Система уравнений может быть представлена в виде матрицы коэффициентов, например, для решения методом Гаусса.

**5. Множества**

* **Описание**: Множество — это структура данных, которая хранит уникальные элементы без повторений и в произвольном порядке.
* **Использование**:
  + Представление математических множеств, таких как корни уравнений или множество решений.
  + Операции объединения, пересечения и разности над множествами чисел или выражений.
* **Пример**: Множество решений уравнения x2=4x^2 = 4x2=4 может быть представлено как {−2,2}\{ -2, 2 \}{−2,2}.

**6. Хэш-таблицы**

* **Описание**: Хэш-таблицы — это структуры данных, которые ассоциируют ключи с определенными значениями для быстрого доступа.
* **Использование**:
  + Хранение переменных и их значений во время вычислений.
  + Кэширование промежуточных результатов для ускорения вычислений, особенно в символьных системах.
* **Пример**: Для выражения f(x)=x2+2xf(x) = x^2 + 2xf(x)=x2+2x, система может сохранить значение f(2)f(2)f(2) в хэш-таблице для быстрого доступа при повторном вычислении.

**7. Стек**

* **Описание**: Стек — это структура данных, работающая по принципу «последний вошел — первый вышел» (LIFO).
* **Использование**:
  + Используется для хранения промежуточных результатов вычислений, например, при разборе выражений в обратной польской записи.
  + Управление вложенными функциями и выражениями.
* **Пример**: При вычислении выражения (2+3)∗4(2 + 3) \* 4(2+3)∗4 система может сначала сохранить результат (2+3)(2 + 3)(2+3) в стеке, а затем умножить его на 4.

**8. Очередь**

* **Описание**: Очередь — это структура данных, работающая по принципу «первый вошел — первый вышел» (FIFO).
* **Использование**:
  + Обработка задач в символьных вычислениях, где последовательность операций должна выполняться в определенном порядке.
  + Обработка алгоритмов в параллельных вычислениях.
* **Пример**: Вычисления могут выполняться по мере добавления операций в очередь для последовательной обработки.

**Перспективы и будущее развитие**

С развитием компьютерной алгебры структура данных становится все более важной для повышения эффективности вычислений и работы с большими символьными выражениями. Современные системы, такие как MATHEMATICA и Maple, продолжают улучшать алгоритмы, которые позволяют более эффективно использовать структуры данных. Одним из направлений развития является интеграция с квантовыми вычислениями, где структуры данных могут быть использованы для моделирования квантовых алгоритмов.

**Тенденции:**

1. **Оптимизация структур данных** для работы с большими выражениями и системами уравнений.
2. **Интеграция с машинным обучением** для автоматической классификации и упрощения математических объектов.
3. **Использование распределенных и параллельных вычислений** для ускорения символьных вычислений на больших наборах данных.

Таким образом, структуры данных в компьютерной алгебре остаются важным элементом, обеспечивающим эффективность символьных и численных расчетов.

Основные этапы развития компьютерной алгебры.

**1. Появление концепции и первых алгоритмов (1950–1960-е годы):**

* **Начало разработки алгоритмов** для работы с символьными вычислениями. Ранее большинство вычислительных методов было сосредоточено на численных расчетах.
* Разработка **основ символьной математики**: первые алгоритмы для разложения многочленов, нахождения производных и интегралов.
* **Теоретические основы**: формализация понятий, связанных с символьными вычислениями, включая введение понятий алгебраических структур, таких как поля и кольца.

**2. Первые системы компьютерной алгебры (1960–1970-е годы):**

* **FORTRAN**: первые программы для символьной математики были написаны на языках программирования общего назначения, таких как Fortran.
* Разработка специализированных систем, таких как **REDUCE** и **MACSYMA**. Эти системы могли решать уравнения, выполнять упрощение выражений и вычислять интегралы символическим образом.
* **Рождение первых компьютерных систем алгебры (CAS)**, где стали использоваться алгоритмы для более сложных математических операций.

**3. Расширение возможностей и применения (1980-е годы):**

* Появление **MATHEMATICA** (1988) и **Maple** (1981), что значительно расширило доступность и функциональность компьютерной алгебры для широкого круга пользователей.
* Развитие символьных алгоритмов для работы с большими выражениями, интеграцией, дифференцированием и решением систем уравнений.
* Появление **модульных систем**, где разработчики могли добавлять новые функции или модифицировать существующие.

**4. Интеграция с другими областями и рост популярности (1990–2000-е годы):**

* **Интеграция с численными методами**: разработка гибридных систем, которые могут сочетать как численные, так и символьные вычисления.
* Расширение области применения компьютерной алгебры на физику, химию, биоинформатику и другие научные дисциплины.
* Повышение эффективности алгоритмов, что позволило работать с большими символьными выражениями и уравнениями.

**5. Современный этап (2010-е годы – по настоящее время):**

* Развитие **параллельных вычислений** и использование графических процессоров (GPU) для ускорения символьных операций.
* Применение систем компьютерной алгебры в обучении, исследовательской деятельности и инженерии, что способствовало дальнейшему распространению программ, таких как **SageMath**.
* Развитие **облачных вычислений**: системы компьютерной алгебры теперь доступны онлайн, что позволяет пользователям выполнять сложные вычисления удаленно.

**6. Будущее компьютерной алгебры:**

* Увеличение интеграции с искусственным интеллектом и машинным обучением для автоматизации открытия новых математических результатов.
* Продолжение разработки более эффективных и масштабируемых символьных алгоритмов, особенно в свете развития квантовых вычислений.

Системы компьютерной алгебры. Достижения и перспективы.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Система** | **Тип (онлайн/устанавливаемая)** | **Совместимость** | **Основные возможности** | **Частота обновлений** | **Достижения** | **Перспективы** |
| MATHEMATICA | Устанавливаемая и облачная | Windows, macOS, Linux | Символьные вычисления, машинное обучение, визуализация данных, обработка больших данных | Обновления ежегодно | Лидер в области научных расчетов, поддержка нейронных сетей и ИИ | Интеграция с облачными сервисами, развитие ИИ, улучшение производительности для обработки больших данных |
| Maple | Устанавливаемая и облачная | Windows, macOS, Linux | Дифференциальные уравнения, символьная математика, инженерные расчеты, оптимизация | Обновления примерно раз в год | Мощные инструменты для алгебры, большая библиотека встроенных математических функций | Углубленная поддержка математического моделирования и визуализации, улучшение интеграции с облачными сервисами |
| SageMath | Устанавливаемая и онлайн | Windows, macOS, Linux | Открытая система для символьных вычислений, поддержка линейной алгебры, комбинаторики | Обновления сообщества каждые 6-12 месяцев | Бесплатное и мощное ПО для ученых и инженеров, интеграция с Python | Развитие через открытое сообщество, улучшение совместимости с другими системами и расширение функциональности |
| Wolfram Alpha | Онлайн | Любая ОС (через браузер) | Автоматический расчет уравнений, символьные вычисления, поиск информации на основе данных | Постоянные обновления | Быстрый доступ к сложным расчетам без установки программного обеспечения, интеграция с базами данных | Развитие в направлении поддержки сложных символьных вычислений, интеграция с ИИ для улучшения обработки запросов |
| Maxima | Устанавливаемая и онлайн | Windows, macOS, Linux | Символьные вычисления, упрощение выражений, решение уравнений и систем | Несколько раз в год | Простой интерфейс, ориентированность на научное сообщество | Повышение производительности, улучшение интерфейса и расширение математических возможностей |
| SymPy | Устанавливаемая (Python-библиотека) | Windows, macOS, Linux | Символьные вычисления в Python, работа с математическими выражениями и уравнениями | Регулярные обновления в рамках Python-сообщества | Легкость интеграции с другими библиотеками Python, активное сообщество | Развитие в рамках Python-экосистемы, улучшение поддержки для сложных символьных расчетов |
| GeoGebra | Устанавливаемая и онлайн | Windows, macOS, Linux, Android, iOS | Динамическая геометрия, графики, математика для студентов и преподавателей | Обновления несколько раз в год | Популярность в образовательной среде, поддержка множества платформ | Углубление интеграции с учебными системами, расширение возможностей в области научных и инженерных расчетов |
| Mathcad | Устанавливаемая | Windows | Инженерные расчеты, интеграция с системами проектирования (CAD), символьные вычисления | Ежегодные или реже | Популярность среди инженеров, поддержка сложных расчетов и их визуализации | Интеграция с другими инженерными платформами, улучшение возможностей для работы с большими проектами |

Задание 1.2. Платное программное обеспечение.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Название | Цена | Официальный сайт | Системные требования | Возможности | Жизненный цикл |
| 1 | Wolfram Mathematica | 795$ (стандартная) | <https://wolfram.com> | Windows, macOS, Linux | Символьные и числовые вычисления, обширные библиотеки, интеграция с ИИ, интерактивные блокноты | **1988**: Появление первой версии Mathematica. С тех пор система прошла множество крупных обновлений, включая интеграцию с искусственным интеллектом и параллельными вычислениями​ Активное, регулярные обновления; зрелая система​ |
| 2 | Maple | 995$ (академическая) | <https://maplesoft.com> | Windows, macOS, Linux | Символьные вычисления, алгебра, калькуляция, физические модели, поддержка единиц измерения | **1982**: Выпущена первая версия. В последующие годы добавлены мощные символьные и числовые возможности, улучшен графический интерфейс  Активное, регулярно обновляется​ |
| 3 | LiveMath | 69$ - 199$ | <https://livemath.com> | Windows, macOS, Linux | Алгебраические преобразования, 2D/3D графики, простой интерфейс, публикация в интернете | **1994**: Вышла под названием Theorist. Позже переименована в LiveMath, с акцентом на интерактивную работу с графиками.  Активное, последнее обновление в 2022 году​ |
| 4 | MathStudio | 19,99$ (базовая версия) | <https://mathstudio.com> | iOS, macOS, Windows | Графики, калькуляция, операции с матрицами, динамическое 3D построение графиков | **2009**: изначально известна как SpaceTime, переименована в MathStudio в 2011. Постоянно обновляется, фокусируясь на мобильных устройствах |

**Наблюдения и перспективы:**

* **Частота обновлений**: Wolfram Mathematica и Maple являются самыми развитыми системами, регулярно получающими новые функции и улучшения. Mathematica интегрируется с технологиями ИИ, что может указать на дальнейшее развитие в сторону машинного обучения.
* **Платформы**: Большинство систем кроссплатформенные, хотя некоторые, например, **MathStudio**, более легковесные и доступны для мобильных операционных систем, что отражает растущую тенденцию к мобильной совместимости в вычислениях.
* **Перспективы**: Будущее CAS-инструментов движется в сторону более интерактивных и удобных для пользователя сред, таких как система LiveMath, которая делает упор на простоту использования, визуальные манипуляции с графиками и минимальные знания программирования для пользователей.

Задание 1.3. Бесплатное программное обеспечение.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Официальный сайт разработчика | Системные требования | Возможности | Годы жизненного цикла и этапы развития |
| 1 | SageMath | Windows, macOS, Linux, 64-bit | Общая математика, алгебра, статистика, работа с большими данными, графика | Разработка с 2005 года. Этапы: первое публичное издание Sage 1.0 — 2006 г. Последняя версия — 2023 г. (9.8). Программа активно развивается и актуальна. |
| 2 | Maxima | Windows, macOS, Linux, 32/64-bit | Символьные вычисления, алгебра, дифференциальные уравнения, манипуляции с выражениями | Появилась в 1967 году как Macsyma. Открыта в 1998 году под GNU GPL. Последняя версия — 2022 г. (5.46.0). Программа актуальна и регулярно обновляется. |
| 3 | GNU Octave | Windows, Linux, macOS, Android | Численные вычисления, альтернатива MATLAB, поддержка линейной алгебры и визуализации | Начало разработки — 1992 год, первая версия — 1994 г. Последняя версия — 2023 г. (7.4.0). Программа активно используется и обновляется. |
| 4 | Scilab | Windows, macOS, Linux, 32/64-bit | Численные вычисления, моделирование и симуляция, альтернатива MATLAB | Разработка с 1990 года, первая публичная версия — 1994 г. Последняя версия — 2023 г. (6.1.1). Программа активно поддерживается и актуальна. |
| 5 | SymPy | Windows, Linux, macOS, 32/64-bit | Символьные вычисления, интеграция с Python, простота использования | Основана в 2007 году. Последняя версия — 2024 г. (1.13.2). Программа активно развивается и остается актуальной. |

Задание 1.4. Онлайн-сервисы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Название | Адрес онлайн-сервиса | Возможности | Годы жизненного цикла |
| 1 | Wolfram Alpha | [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com) | Решение уравнений, вычисление интегралов, построение графиков, статистика, физика, химия и др. | Появился в 2009 г., активно развивается. На 2024 г. — один из ведущих сервисов для вычислений. |
| 2 | GeoGebra | [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) | Построение графиков, работа с функциями, геометрия, алгебра, статистика | С 2001 года, активно используется в образовательных целях. Последняя версия — 2023 г. |
| 3 | Symbolab | [www.symbolab.com](http://www.symbolab.com) | Решение математических задач: алгебра, тригонометрия, производные, интегралы | Появился в 2011 г., активно поддерживается. Последние обновления — 2023 г. |
| 4 | Desmos | [www.desmos.com](http://www.desmos.com) | Построение графиков, решение уравнений, работа с функциями | С 2011 года. Используется в образовании, актуален в 2024 г. |
| 5 | Mathway | [www.mathway.com](http://www.mathway.com) | Решение уравнений, статистика, интегралы, тригонометрия | Запущен в 2002 г. Актуален и активно используется в 2024 г. |